OSNOVE TEORIJE VJEROJATNOSTI ZA INŽENJERE

I. VJEROJATNOSNI PROSTOR

Skup ishoda

U teoriji vjerojatnosti razmatraju se događaji koji se mogu, ali ne moraju dogoditi. Takvi se događaji zovu **slučajnim događajima**. Dakle, slučajni događaj jest događaj koji ne možemo predvidjeti. Takvi se događaji događaju u nekim pokusima ili pri opažanjima nekih prirodnih pojava.

Primjer 1. Bacamo dvije kocke označene brojevima od 1 do 6 i registriramo brojeve koji su se pojavili na gornjim stranama kocaka. Zanima nas događaj: *zbroj brojeva na bačenim kockama jest 9*.

Događaj koji razmatramo u tom pokusu je slučajan (zbroj može biti svaki broj od 2 do 12 i ne možemo predvidjeti hoće li zbroj biti 9 ili neće). Od sada ćemo razmatrati samo slučajne događaje i zvat ćemo ih, jednostavno, događajima i označavati velikim slovima abecede: A,B,C, …

Evo nekoliko tipičnih pokusa u kojima nastaju (slučajni) događaji:

1) *Bacamo kocku čije su strane označene brojevima od 1 do 6* (od sada ćemo samo govoriti: *bacamo kocku*).
2) *Iz skupa od 32 karte slučajno biramo jednu kartu.*
3) *Biramo slučajno troznamenkast broj.*
4) *Biramo slučajno dva troznamenkasta broja.*
5) *Od 5 kandidata slučajno biramo dvojicu od kojih će jedan biti predsjednik, a drugi potpresjednik.*
6) *Bacamo novčić dok ne ispadne pismo* (jedna strana novčića zove se **pismo** oznaka P, a druga **glava** – oznaka G).
7) *Mjerimo vrijeme trajanja kemijske reakcije.*
8) *Mjerimo dnevnu temperaturu.*

Razmotrimo pokus bacanja kocke jedan put i registriramo broj koji se pojavio na gornjoj strani kocke. Možemo govoriti o različitim događajima u tom pokusu, primjerice,
A: *ispao je broj 6,*
B: *ispao je broj 4,*
C: *ispao je broj 2,*
D: *ispao je paran broj,*
E: *nije ispao broj 2*.

Složit ćete se da su događaji A, B, C jednostavni, a da su događaji D, E složeni. Naime, za događanje događaja A postoji samo po jedna mogućnost, slično je za događaje B,C, za događanje događaja D postoje tri mogućnosti (da se dogodi bilo koji od događaja A, B, C), dok za događanje događaja E postoji pet mogućnosti. Jednostavne događaje u nekom pokusu zvat ćemo **ishodima** (**elementarnim događajima**).
Uočite sljedeće: **svaki se događaj sastoji od ishoda**.

Vrlo je važno da u pokusu koji razmatramo znamo odrediti skup ishoda.

Primjer 2. Odredimo skup ishoda za pokuse 1-8 navedene prije.

1. **Bacanje kocke jedan put**. U tom pokusu ima šest ishoda; možemo ih označiti brojevima 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2. **Biranje karte iz skupa od 32 karte**. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.

A: as pik, B: as tref, C: sedmica karo, D: kralj herc, E: dečko herc, F: dama herc. Vidimo da u tom pokusu ima ishoda koliko i karata, dakle ima 32 ishoda.

3. **Biranje troznamenkastog broja**. Navedimo nekoliko ishoda (ne označavajući ih slovima): 123, 108, 801, 213. Zaključujemo da u tom pokusu ima ishoda koliko i troznamenkastih brojeva, dakle ima 900 ishoda.

4. **Biranje dvaju troznamenkastih brojeva**. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.

A: izabrali smo 123 i 108,
B: izabrali smo 234 i 432,
C: izabrali smo 333 i 555.
Naravno da je svejedno izabrali mi brojeve 123 i 108 ili izabrali brojeve 108 i 123 (bitno je da smo oba puta odabrali ista dva troznamenkasta broja, a ne kojega smo od njih prije izabrali). Zato svaki ishod možemo smatrati **dvočlanim skupom** (koji je podskup skupa svih troznamenkastih brojeva – kojih ima 900). Takvih podskupova ima $\binom{900}{2}$.

5. **Biranje predsjednika i potpredsjednika od 5 kandidata**. Da bismo opisali skup ishoda označimo kandidate malim slovima abecede: a, b, c, d, e. Navedimo nekoliko ishoda u tom pokusu.

   A: *a* predsjednik, *c* potpredsjednik
   B: *c* predsjednik, *a* potpredsjednik
   C: *d* predsjednik, *e* potpredsjednik.

Uočite da su A, C različiti ishodi iako u oba slučaja sudjeluju iste osobe (naime nije svejedno tko će biti predsjednik, a tko potpredsjednik). Događaje A,B,C možemo zapisati i kraće:
A: ac ;
B: ca;
C: de.
Zaključujemo da svaki ishod **možemo jednoznačno zapisati šifrom** koja se sastoji od dvaju slova (izabranih među slovima a, b, c, d, e). Šifru čitamo tako da je **prvo slovo šifre predsjednik**, a **drugo potpredsjednik**,
primjerice šifra *ec* znači da je *e* predsjednik, a *c* potpredsjednik.
Uočite dva važna svojstva tih šifara.
(i) slova šifre su različita.
(ii) bitno je mjesto slova u šifri (pri zamjeni slova šifra se mijenja).

Svojstvo (ii) u matematici imaju **uređeni parovi**. Dakle svaku takvu šifru, tj. svaki ishod u tom pokusu možemo smatrati uređenim parom kojemu su koordinate različite i iz skupa su $\{a,b,c,d,e\}$.

Uređene parove obično pišemo u oblim zagradama, a koordinate odvajamo zarezom. Tako bi šifru *ab* mogli pisati kao uređeni par *(a,b)*, međutim, radi uštede vremena i prostora pisat ćemo bez zagrada i bez zareza. Ispišimo sve ishode:

ab, ba, ac, ca, ad, da, ae, ea, bc, cb, bd, db, be, eb, cd, dc, ce, ec, de, ed.

Vidimo da ih ima 20. Do tog smo broja mogli doći i ovakvim razmišljanjem:
Prvu koordinatu smo mogli izabrati na 5 načina, a drugu (jer mora biti različita od prve) na 4 načina (bez obzira koju smo prvu izabrali). Zato ukupno ima $5 \cdot 4 = 20$ takvih uređenih parova. Drugim rječima, predsjednika možemo izabrati na 5 način, nakon toga potpredsjednika na 4 načina (bez obzira kojega smo izabrali za predsjednika).

Napomena. Pravilo koje smo koristili pri računanju broja šifara u gornjem primjeru zove se **osnovnim teoremom prebrojavanja**. Njegov se smisao vidi iz tog primjera. Bitno je da se uoči da se svaki sljedeći korak može učiniti na određeni broj načina, bez obzira koji su bili prethodni koraci. Ako bi, recimo, broj načina na koji možemo učiniti 3. korak ovisio o tome koji smo 2. korak ili koji smo 1. korak izabrali, onda ne bismo mogli koristiti to pravilo.

6. **Bacanje novčića dok ne ispadne pismo**. Evo prijedloga nekoliko ishoda u tom pokusu.
   A: pismo je ispalo u prvom bacanju.
   B: pismo je ispalo u drugom bacanju.
   C: pismo je ispalo u desetom bacanju.

Ako događanje pisma označimo slovom *P*, a događanje glave slovom *G*, onda događaje A, B, C možemo zapisati i ovako:
A: P;
B: GP;
C: GGGGGGGGGP.
Pritom GP znači da je u prvom bacanju ispala glava, a drugom pismo, što je isto kao i da je pismo ispalo u drugom bacanju. Slično, GGGP jest zapis događaja *pismo je ispalo tek četvrti put*. Koliko ima takvih zapisa toliko u tom pokusu ima ishoda, dakle ima ih beskonačno mnogo. Po tome se taj pokus razlikuje od prethodnih. Treba uočiti da je taj skup ishoda prebrojiv, tj. može se postaviti u niz: P, GP, GGP, GGGP, GGGGP, GGGGGP, …
Uočimo još jednu razliku od između ovih ishoda i onih prije. Ovi ishodi nisu ravnopravni, što se vidi i po dužini zapisa. Poslije ćemo vidjeti kako to utječe na vjerojatnost.

7. **Mjerenje vremena trajanja kemijske reakcije**. Tu je ishod svako moguće vrijeme trajanja te kemijske reakcije i može se označiti pozitivnim realnim brojem. Ovisno o pokusu to može biti bilo koji pozitivni realni broj; zato je skup ishoda neki interval u skupu realnih pozitivnih brojeva. S donje je strane taj interval omeđen nulom (vrijeme trajanja kemijske reakcije ne može biti negativno). S gornje strane taj je interval neodređen (koliko najviše može trajati neka kemijska reakcija?). Taj se pokus bitno razlikuje od prethodnih. Naime, u prethodnim je pokusima skup ishoda bio konačan ili prebrojiv, a tu je neprebrojiv.

Treba uočiti da smo vrijeme trajanja kemijske operacije shvatili u teoretskom smislu. U praksi, vrijeme trajanja ovisi o mjernoj skali. Ako, na primjer, mjerimo mjernim instrumentom koji registrira stotinku sekunde (a manje vremenske vrijednosti ne registrira), onda bi skup ishoda bio dio teoretskog intervala, kojeg čine čvorišta podjele tog intervala na stotinke.

8. **Mjerenje dnevne temperature**. Pretpostavimo da je riječ o mjerenju temperature u Celzijevim stupnjevima na slučajno odabranom mjestu na Zemlji, u slučajno odabrano vrijeme. Skup ishoda tog pokusa jest neki interval u skupu realnih brojeva (kao i u prethodnom pokusu). Taj je interval omeđen s donje strane brojem –273 (apsolutna nula), dok je međa s gornje strane neodređena (kao i u 7. pokusu).

Dakle, ishodi u nekom pokusu čine skup (**skup ishoda**, koji ćemo označavati slovom *S*).
Treba uočiti tri mogućnosti s obzirom na broj ishoda.
I. skup ishoda je konačan.
II. skup ishoda je beskonačan, ali prebrojiv.
III. skup ishoda je neprebrojiv.
U teriji vjerojatnosti i u praksi pojavljuju se sve tri mogućnosti i sve su važne (to se vidi i iz navedenih primjera). Napomenimo da je, što se vjerojatnosti tiče, II bliže I, nego III. Najvažniji primjeri III. mogućnosti jesu kad je skup ishoda neki interval u skupu realnih brojeva (oni nastaju u pokusima u kojima se nešto mjeri i takve ćemo ponajviše razmatrati).

Ishodi su jednostavni događaji; općenito događaj je sastavljen od jednog ili više ishoda. Zato **svaki događaj možemo interpretirati kao neki podskup skupa ishoda** *S*.
Pri takvoj su interpretaciji ishodi **jednočlani događaji**.
Skup svih ishoda *S* također je događaj; taj događaj zovemo **sigurnim događajem**.
Pokazuje se da je razumno uvesti i **nemogući događaj**; taj događaj interpretiran je **praznim skupom** (oznaka Ø).

Primjer 3. Bacamo kocku jedan put. Zapišimo pomoću skupova događaje:
S (sigurni događaj);
A: ispao je broj veći od dva;
B: ispao je paran broj;
C: ispao je broj veći od 3, a manji od 5;
D: nije ispao neparan broj;
E: ispao je broj 4.

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$
$A = \{3,4,5,6\}$
$B = \{2,4,6\}$
$C = \{4\}$
$D = \{2,4,6\}$
$E = \{4\}$.
Treba uočiti da se događaji A, D sastoje od istih ishoda; kažemo da su ta dva događaja **jednaka** i pišemo A = D. Slično, C = E. Definicija jednakosti događaja u skladu je s definicijom jednakosti skupova.

Zaključujemo:
1. Događaj je podskup skupa svih ishoda.
2. Dva su događaja jednaka ako se sastoje od istih ishoda.

Ako je skup ishoda konačan ili beskonačan prebrojiv, onda se u teoriji vjerojatnosti razmatraju **svi podskupovi skupa ishoda kao događaji**.
Ako je skup ishoda beskonačan neprebrojiv, pokazuje se da **nije dobro prihvatiti sve podskupove skupa ishoda kao događaje**, već samo neke. Ta se, za mnoge iznenađujuća činjenica, može točno matematički obrazložiti; mi to u ovoj knjizi nećemo učiniti. Napomenimo da su u pokusima u kojima je skup ishoda neki interval skupa realnih brojeva (takvi nas u pravilu zanimaju), **najvažniji i u praksi najzanimljiviji** događaji upravo oni koji se skupovno **mogu interpretirati kao podintervali** skupa ishoda. Dobro je znati da se oni prihvaćaju kao događaji u teoriji vjerojatnosti. Na primjer, u pokusu mjerenja temperature, obično nas zanimaju događaji poput:
A: temperatura je iznad nule.
B: temperatura je manja od 30º.
C: temperatura je između 4º i 5.5º.

Primjer 4. Odredimo broj svih događaja u pokusu bacanja kocke jedan put.

Možemo postupiti na više načina.

1. način. Popišimo redom sve podskupove skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ prema broju elemenata (članova) i prebrojimo ih.

nulčlanih ima 1 (samo prazni skup – nemogući događaj)
jednočlanih ima 6 (koliko i ishoda)
dvočlanih ima 15
tročlanih ima 20
četveročlanih ima 15
peteročlanih ima 6
šesteročlanih ima 1 (sigurni događaj S).
Zbrajanjem dobijemo: 1+6+15+20+15+6+1 = 64.
Uočite u tom zbroju simetričnost binomnih koeficijenata.

2. način. Svakom događaju (odnosno podskupu skupa S) pripišimo šifru duljine 6 sastavljenu od brojeva 0,1 kao u primjerima:

događaj (podskup) *ispao je paran broj* ima šifru 010101 što treba čitati kao *podskup ne sadrži 1, sadrži 2, ne sadrži 3, sadrži 4, ne sadrži 5, sadrži 6*.
Slično, 110011 je šifra podskupa (događaja) $\{1,2,5,6\}$.
Dakle kako je 1 na drugom mjestu znači da broj 2 pripada skupu, a kako je broj 0 na trećem mjestu, to znači da 3 ne pripada podskupu; slično je za ostala mjesta. Treba uočiti da događaja ima koliko i takvih šifara. Takvih šifara ima $2^6 = 64$ (prvo se mjesto bira na 2 načina, drugo opet na dva načina, bez obzira kako je izabrano prvo mjesto itd.)

Zaključivanje iz primjera može se provesti općenito i dokazati:

Ako ima *n* ishoda onda ima 2^n događaja.

Dakle, broj svih događaja **eksponencijalno ovisi** o broju ishoda. Zato je već kod relativno malog broja ishoda, broj događaja tako velik da je praktično nedostupan.
Na primjer, ako ima 31 ishod, onda ima 2^{31} = 2 147 483 648 svih događaja. Da bismo dobili predodžbu o tom broju, zamislimo da netko broji svih 24 sata dnevno i da svake sekunde može izbrojiti jedan broj. Tada bi mu trebao cijeli život (više od 68 godina) da dobroji do tog broja. Zapisivanje brojeva od 1 do 2^{31} trajalo bi još duže, a zapisivanje svih događaja u tom slučaju (nekom šifrom) trajalo bi još duže.

Dobro je što u teoriji vjerojatnosti **nije važan popis svih događaja** u nekom pokusu, već samo neki zanimljivi događaji i broj ishoda koji ih čine.
Ako u pokusu ima beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda, tada, kao i u slučaju konačnog broja ishoda, svaki podskup skupa ishoda reprezentira neki događaj. Tada, naravno, ima beskonačno mnogo svih događaja, a može se dokazati da ih ima neprebrojivo mnogo. Kao i u konačnom slučaju, zanimat će nas samo neki događaji, a ne svi.
Na primjer, kod bacanja novčića dok ne ispadne glava, obično nas zanimaju događaji poput:
A: pokus je trajao 5 bacanja,
B: pokus je trajao bar 5 bacanja,
C: pokus je trajao najviše 5 bacanja,
D: pokus je trajao između 5 i 10 bacanja,
E: pokus je trajao paran broj bacanja.
Uočite da se događaji A,C,D sastoje od konačno mnogo , a događaji B,E od beskonačno mnogo ishoda.

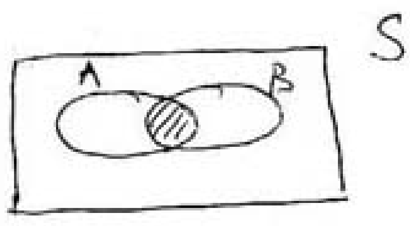
Algebra događaja

Veznici i, ili.
Veznicima se u jeziku povezuju dvije rečenice i tako nastaje nova rečenica, složena od tih dviju. Na primjer, povezivanjem veznikom *i* rečenica:
A: Matea voli plivanje,
B: Matea voli rukomet,
nastaje rečenica
A i B: Matea voli plivanje i Matea voli rukomet.
Kraće, povezivanjem rečenica A, B veznikom *i* nastaje rečenica *A i B*.
U jeziku se, premu **načelu ekonomičnosti**, rečenica *A i B* piše kao:
Matea voli plivanje i rukomet.
Treba uočiti da svaka od rečenica A, B nešto tvrdi, a da rečenica *A i B* tvrdi da vrijedi jedno i drugo.
Slično, povezivanjem veznikom *ili* rečenica:
A: Raspisan je natječaj za inženjera matematike,
B: Raspisan je natječaj za profesora matematike,
nastaje rečenica
A ili B: Raspisan je natječaj za inženjera matematike ili raspisan je natječaj za profesora matematike.
Kraće, povezivanjem rečenica A, B veznikom *ili* nastaje rečenica *A ili B*.
Opet, prema načelu ekonomičnosti, ta bi se rečenica pisala kao:
Raspisan je natječaj za inženjera ili profesora matematike.
Treba uočiti da rečenica *A ili B* tvrdi da vrijedi jedno ili drugo, ali **dopušta da vrijedi jedno i drugo**. Ta je rečenica tvrdnja da je natječaj za one koji imaju jednu od tih diploma, ali i za one koji imaju obje diplome, dakle, koji su ujedno i inženjeri i profesori matematike (a takvih ima). Treba znati da se veznik *ili* u matematici uvijek shvaća na taj način (**uključivi ili**). U svakidašnjem govoru to uvijek nije tako. Na primjer, u rečenici:
Marko je položio ispit ocjenom 2 ili 3,
veznik *ili* ne dopušta jedno i drugo (**isključivi ili**). Da bi se to naglasilo ta bi se rečenica mogla napisati i kao:
Marko je položio ispit ili ocjenom 2 ili ocjenom 3.

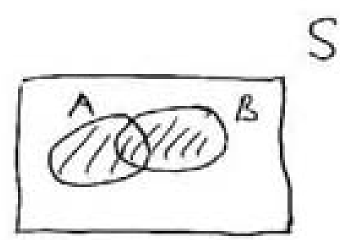
Zbroj i umnožak događaja.

Pretpostavimo da su rečenice A, B formulacije dvaju događaja u nekom pokusu. Tada su rečenice *A i B*, *A ili B* također formulacije događaja u tom pokusu.
Neka je, na primjer, u pokusu bacanja kocke jedan put:
A: ispao je broj veći od 2,
B: ispao je paran broj.
Tada je:
A i B: ispao je broj veći od 2 i ispao je paran broj.
Također:
A ili B: ispao je broj veći od 2 ili je ispao paran broj.
Zapišimo te događaje kao poskupove skupa ishoda (**skupovna interpretacija događaja**).
$A = \{3,4,5,6\}$
$B = \{2,4,6\}$
$A \text{ i } B = \{4,6\}$
$A \text{ ili } B = \{2,3,4,5,6\}$
Treba uočiti da, u skupovnoj interpretaciji, događaju *A i B* odgovara **presjek skupova** A, B; također da događaju *A ili B* odgovara **unija skupova** A,B. To očito vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru.
Uobičajeno je da se događaj *A i B* u teoriji vjerojatnosti zove **umnoškom (produktom)** događaja A, B i da se piše kao $A \cdot B$;
također da se događaj *A ili B* zove **zbrojem (sumom)** događaja A,B i da se piše kao $A+B$.
Dakle,
$A \cdot B$ = umnožak događaja A,B (dogodio se i događaj A i događaj B; dogodila su se oba od događaja A,B),
$A+B$ = zbroj događaja A,B (dogodio se događaj A ili događaj B; dogodio se barem jedan od događaja A, B).
Kako smo rekli, u skupovnoj interpretaciji, događaju $A \cdot B$ odgovara presjek skupova A,B, tj. skup $A \cap B$, a događaju A+B skup $A \cup B$. Zato se, katkad, ti događaji tako i označuju.

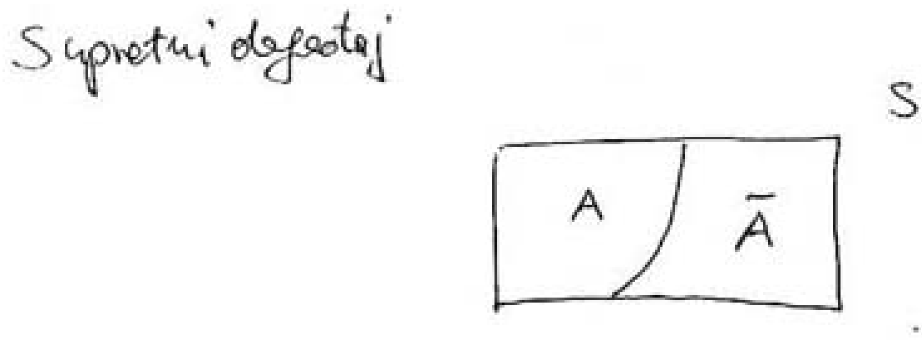
Zbroj i umnožak događaja



$A \cdot B$
A i B



A + B
A ili B



Treba uočiti da su zbrajanje, odnosno množenje **binarne operacije** na događajima; one dvama događajima pridružuju novi događaj, složen od njih, njihov zbroj, odnosno njihov umnožak.

Suprotni događaj.

Nijekom (negacijom) neke rečenice **protuslovi se** tvrdnji koju ta rečenica izriče. Na primjer,
A: Marko je položio ispit iz matematike,
nije A: Nije Marko položio ispit iz matematike.
Rečenicom *nije A* protuslovi se rečenici *A*, tj. njom se niječe (negira) tvrdnja izrečena rečenicom *A*. Napomenimo da je rečenicu *nije A*, uobičajeno zapisati kao:
nije A: Marko nije položio ispit iz matematike.
(iz **estetskih** i nekih drugih razloga riječ *nije* ide unutra)
Predpostavimo da je rečenica *A* formulacija nekog događaja. Tada je rečenica *nije A* također formulacija nekog događaja kojega zovemo **suprotnim događajem** događaja *A* .
Na primjer, ako je u pokusu bacanja kocke jedan put:
A: ispao je paran broj,
onda je suprotni događaj:
nije A: nije ispao paran broj.
U skupovnoj je interpretaciji:
A = $\{2,4,6\}$
nije A = $\{1,3,5\}$.
Treba uočiti da se događaj *nije A* sastoji upravo od onih ishoda koji ne pripadaju događaju *A*. To znači da je *nije A* **komplement** skupa *A* u skupu svih ishoda *S*. Uobičajeno je da se suprotni događaj *nije A* događaja *A* označava kao $\bar{A}$ i čita kao *ne a*. Dakle,
$\bar{A}$: suprotni događaj događaja *A* (nije se dogodio *A*).
U skupovnoj interpretaciji $\bar{A}$ je komplement skupa *A* u skupu *S*.

Treba uočiti da je nijekanje događaja **unarna operacija** na događajima; ona svakom događaju pridružuje njemu suprotni događaj.

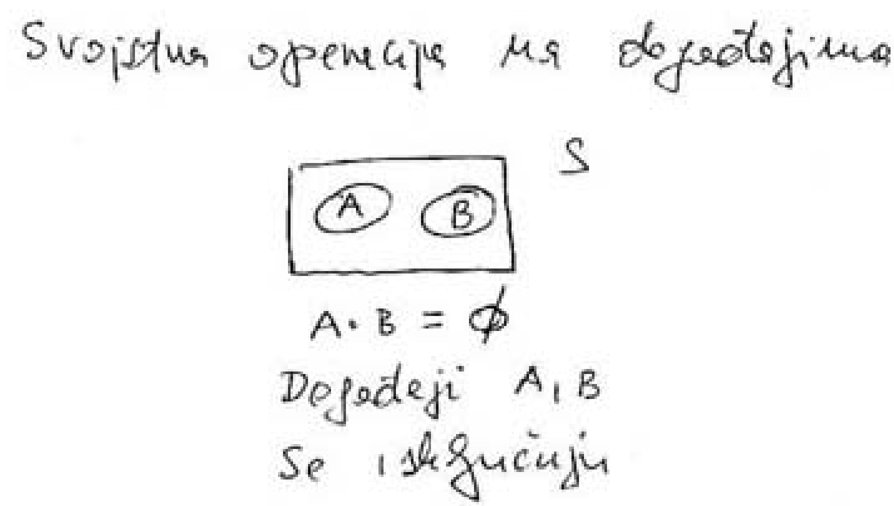
Primjer 5. Zapišimo sljedeće događaje i skupovno ih interpretirajmo:
a) *dogodio se A, ali se nije dogodio B*,
b) *dogodio se točno jedan od događaja A, B*,
c) *nije se dogodio nijedan od događaja A, B*,
d) *bar jedan od događaja A,B nije se dogodio*,

e) *dogodio se najviše jedan od događaja A,B.*

a) $A\overline{B}$
b) $A\overline{B}+B\overline{A}$
c) $\overline{A}\,\overline{B}$
d) $\overline{A}+\overline{B}$
e) $\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+\overline{A}B$.

Svojstva operacija na događajima

U skupovnoj interpretaciji operacijama zbrajanja, množenja i nijekanja na događajima odgovaraju redom operacije unije, presjeka i komplementiranja (s obzirom na sigurni događaj *S*). Pri tom svojstvima operacija na skupovima odgovaraju pripadna svojstva operacija na događajima. U sljedećoj ćemo tablici u lijevom stupcu zapisati važna svojstva unije, presjeka i komplementiranja na podskupovima skupa *S*, a u desnom pripadna svojstva operacija zbroja, umnoška i nijekanja na događajima. Ta svojstva vrijede za sve dogasđaje *A,B,C*.



$A\cup B=B\cup A$	$A+B=B+A$
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A+B)+C=A+(B+C)$
$A\cap B=B\cap A$	$AB=BA$
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(AB)C=A(BC)$
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A(B+C)=AB+AC$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A+(BC)=(A+B)(A+C)$

$(A^c)^c = A$ $\qquad\qquad$ $\overline{\overline{A}} = A$

A $\cup$ A ^{c} =S $\qquad\qquad$ A $\cup$ $\overline{A}$ =S

A $\cap$ A ^{c} = Ø $\qquad\qquad$ A $\cap$ $\overline{A}$ = Ø

(A $\cup$ B) ^{c} =A ^{c} $\cap$ B ^{c} $\qquad\qquad$ $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(A $\cap$ B) ^{c} =A ^{c} $\cup$ B ^{c} $\qquad\qquad$ $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Primjer 6. Izrecimo riječima sljedeća svojstva operacija na događajima:

a) $\overline{\overline{A}} = A$
b) $A + \overline{A} = S$
c) $A\overline{A} =$ Ø
d) DeMorgnova pravila.
   (i) $\qquad \overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
   (ii) $\qquad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

a) Događaj: *nije istina da se nije dogodio A* jednak je događaju *A*. Možemo reći i ovako: suprotni događaj suprotnog događaja jednak je početnom događaju. To u stvari znači da su događaji *A* i $\overline{A}$ međusobno suprotni ($\overline{A}$ suprotan je događaju *A*, dok je *A* suprotan događaju $\overline{A}$).
b) Za svaki događaj vrijedi da se dogodio ili nije.
c) Međusobno suprotni događaji ne mogu se istovremeno dogoditi
d) (i) događaj: *nije istina da se dogodio A ili B* jednak je događaju: *nije se dogodio A niti se dogodio B*.
   (ii) događaj: *nije istina da se dogodio A i B* jednak je događaju: *nije se dogodio A ili se nije dogodio B*.

Skup događaja u nekom pokusu skupa s operacijama zbrajanja, množenja i nijekanja zovemo algebra događaja.

Uobičajeno je algebru događaja označavati oznakom $(\underline{A},+,\cdot,-)$, gdje $\underline{A}$ označava skup svih događaja. Treba uočiti da ima više različitih algebra događaja (koje su pridružene različitim pokusima), ali da svaka od njih ima gore napisana svojstva.

Vidjeli smo da se dva međusobno suprotna događaja ne mogu istovremeno dogoditi. To znači: ako se dogodio *A*, onda se nije dogodio $\overline{A}$ i obratno, ako se dogodio $\overline{A}$, onda se nije dogodio *A*. Općenito:

ako se dva događaja ne mogu istovremeno dogoditi, onda kažemo da se događaji isključuju (u skupovnoj interpretaciji to znači da su pripadni podskupovi disjunktni).

Može se reći i ovako:

Dva se događaja isključuju ako je njihov umnožak nemogući događaj.

Ako su dva događaja međusobno suprotni, onda se oni isključuju, međutim događaji se mogu isključivati, a da ne budu suprotni.

Primjer 7. Bacamo kocku jedan put. Ispišimo sve događaje koji se isključuju s događajem $A = \{1,2,3\}$.

To su događaji $\{4\},\{5\},\{6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{4,5,6\}$ i Ø (nemogući se događaj isključuje sa svakim događajem). Treba uočiti da ima više događaja koji se isključuju s nekim događajem; među njima je samo jedan suprotan zadanom događaju.

Vjerojatnosni prostor

Kako smo rekli (slučajni) događaj se može , ali ne mora dogoditi.
Vjerojatnost događaja jest **brojčana mjera izgleda** (šanse) da se taj događaj dogodi.
Neka je, na primjer u jednoj kutiji 50 crvenih, 20 bijelih i 30 plavih kuglica (koje se ne razlikuju osim po boji) i neka se pokus sastoji od slučajnog biranja jedne kuglice. Označimo:
A: izvučena je kuglica crvena
B: izvučena je kuglica bijela
C: izvučena je kuglica plava.
U pokusu se može dogoditi bilo koji od događaja A, B, C. Intuitivno je jasno da ti događaji **nemaju jednake izglede** (najveći izgled ima događaj A jer crvenih kuglica ima najviše).
Mnogi će, upitani da izgled tih događaja izraze brojčano, odgovoriti da događaj A ima šansu (izgled) 50% (jer crvene kuglice čine 50% kuglica), da događaj B ima šansu 20%, a događaj C šansu 30%.
Ako se analizira zaključak o izgledu izvlačenja crvene kuglice, ustanovit ćemo da se on zasniva na sljedećim činjenicama:
(i) ukupan je broj kuglica 100,
(ii) svaka kuglica ima jednak izgled da bude izvučena (to je smisao uvjeta da se kuglica bira slučajno),
(iii) crvenih kuglica ima 50.
Dakle, u 50 od 100 mogućnosti, izvučena će kuglica biti crvena, pa je izgled izvlačenja crvene kuglice 50%, odnosno $\frac{50}{100}$.
Taj model zaključivanja provest ćemo općenito, samo što nećemo govoriti o izgledu događaja, već o vjerojatnosti događaja i što vjerojatnost nećemo zapisivati u obliku postotka, već u obliku razlomka (odnosno decimalna broja).

Neka u nekom pokusu ima n ishoda i neka su svi ishodi međusobno ravnopravni (imaju međusobno jednake izglede da se dogode). Pretpostavimo da se događaj A sastoji od m ishoda. Tada je **vjerojatnost događanja događaja** A jednaka $\frac{m}{n}$. To kraće pišemo kao:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

(p je početno slovo latinske riječi *probabilis*).

Primjer 8. Bacamo kocku jedan put. Izračunajmo vjerojatnost događaja.
A: ispao je paran broj,
B: ispao je broj veći od dva.

Zapišimo događaj A kao podskup skupa ishoda: $A = \{2,4,6\}$. Tu je m=3, n=6, pa je p(A)=3/6.
Slično je, $B = \{3,4,5,6\}$, pa je p(B) = 4/6.

To rješenje zahtijeva komentar. Naime, pretpostavili smo da brojevi 1,2,3,4,5,6 imaju međusobno jednake izglede da se pojave (da su međusobno ravnopravni), tj. da je kocka homogena. Od sad ćemo, ako ne budemo drukčije rekli, uvijek smatrati da je kocka koju bacamo homogena.
Što bi se moglo dogoditi ako kocka ne bi bila homogena? Zamislimo da smo kocku označili tako da je 6 nasuprot 1, 5 nasuprot 2, 4 nasuprot 3. Zamislimo, također, da smo polovicu kocke koja sadrži stranu označenu brojem 1 izradili od željeza, a onu drugu od aluminija. Ako bi pokus bio bacanje takve kocke, skup ishoda, pa onda i skup događaja, bili bi isti kao i pri bacanju homogene kocke. Međutim vjerojatnosti bi se tih događaja promijenili, jer ishodi ne bi bili međusobno ravnopravni (veća bi bila vjerojatnost da ispane broj 6 nago broj 1).
Treba imati na umu da se bilo koji **praktični pokus** razlikuje od pripadnog **idealnog (zamišljenog, matematičkog) pokusa**.
Objasnimo to. Što znači da bacamo homogenu kocku? Je li uopće moguće izraditi kocku (u matematičkom smislu), posebice homogenu kocku? Ako bismo i imali takvu kocku, teško bi bilo ostvariti apsolutnu ravnopravnost svih ishoda pri bacanju. Zato, kad u teoriji vjerojatnosti govorimo da bacamo homogenu kocku, zamišljamo idealni pokus. Taj bi se idealni pokus mogao formulirati ovako:
Slučajno biramo jedan od brojeva 1,2,3,4,5,6.
Postavlja se pitanje može li se ostvariti takav pokus. Evo nekoliko prijedloga:
1. Bacamo homogenu kocku označenu brojevima 1,2,3,4,5,6.
2. U kutiji je 6 kuglica istih polumjera i istih masa označenih brojevima od 1 do 6. Slučajno vadimo jednu kuglicu.
3. Šest listića označeno je brojevima od 1 do 6 i zatvoreno u 6 kuverata. Biramo slučajno jednu od kuverata.

Treba imati na umu da je svaki od tih pokusa samo približno rješenje. Za ove (različite) pokuse kažemo da su **ekvivalentni**. Sa stanovišta vjerojatnosti, oni se ne razlikuju.

Primjer 9. Kolika je vjerojatnost da od dviju slučajno odabarnih karata iz kupa od 32 karte budu.
a) dva asa
b) dva herca.

Označimo
A: izabrana su dva asa,
B: izabrana su dva herca.
Da bismo odredili vjerojatnost treba odrediti broj ishoda, a da bismo odredili broj ishoda treba znati što su ishodi u tom pokusu. Ishod u tom pokusu jest svaki dvočlani podskup

skupa od 32 karte. Zato ishoda ima $\binom{32}{2}$. Budući da je biranje karata slučajno, ishodi su međusobno ravnopravni. Događaj *A* sastoji se od 6 ishoda:
A = { {as pik, as karo}, {as pik, as herc}, {as pik, as tref}, {as karo, as herc}, {as karo, as tref}, {as herc, as tref} }.
Broj ishoda od kojih se sastoji događaj *A* mogli smo izračunati i kao $\binom{4}{2}$, jer je to broj dvočlanih podskupova četveročlana skupa. Dakle,

$$p(A) = \frac{6}{\binom{32}{2}}.$$

Slično se dobije

$$P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}}$$ jer ukupno ima 8 herčeva.

Svojstva vjerojatnosti događaja.

Iz definicije vjerojatnosti kao omjera svih povoljnih mogućnost i svih mogućnosti proizlaze sljedeća svojstva vjerojatnosti *p* događaja.

1. P(S) = 1 (ukupna vjerojatnost jednaka je 1)
2. p(A+B) = p(A) + p(B), ako se A, B isključuju

Ako u 2. umjesto *B* stavimo $\overline{A}$, dobijemo
$p(A+\overline{A}) = p(A)+p(\overline{A})$, a kako je $A+\overline{A}=S$ i $p(S)=1$, dobijemo
$p(A)+p(\overline{A})=1$, što pišemo i kao
3. $p(\overline{A})=1-p(A)$
Ta se formula zove **formulom vjerojatnosti suprotnog događaja**
i lako se može izravno izvesti.
Ako se u tu formulu stavi A=S, onda je, $\overline{A}$ =Ø, pa je
4. P(Ø) = 0.
Ta se formula može izravno dobiti i iz definicije vjerojatnosti jer se nemogući događaj sastoji od 0 ishoda.

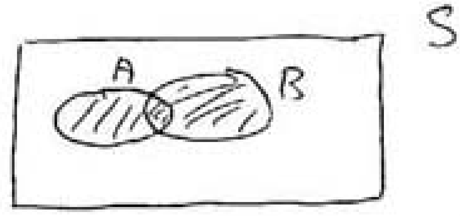
Postavlja se pitanje vjerojatnosti sume događaja za dva događaja koja se nužno ne isključuju.
Razmotrimo sliku. Neka je:
card S = n,
card A = m,
card B = k
card AB = r.
Zato je card (A+B)=m+k-r, pa je
p(A+B) =(m+k-r)/n
= m/n+k/n-r/n

= p(A)+p(B)-p(AB), dakle,

5. p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).

Ta se formula zove **formulom zbroja dvaju događaja**. Ona povezuje vjerojatnosti dvaju događaja, te vjerojatnosti njihova zbroja i umnoška. Ako znamo 3 od tih vjerojatnosti, onda pomoću te formule možemo izračunati i četvrtu.

Svojstva vjerojatnosti događaja



$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$$

Vjerojatnosnim prostorom zovemo algebru događaja <u>A</u> skupa s funkcijom vjerojatnosti
p: <u>A</u> ….[0,1] koja ima svojstva 1,-5.

Kad ima beskonačno mnogo ishoda treba dodati još neka svojstva.
Može se pokazati da se iz svojstava 1. i 2. mogu izvesti svojstva 3., 4. i 5.

U sljedećim ćemo primjerima ilustrirati uporabu nekih svojstava vjerojatnosti i nekih svojstava operacija na algebri događaja.

Primjer 10. Iz kupa od 32 karte slučajno izvlačimo 2 karte. Odredite vjerojatnost da bude:

a) izvučen je točno jedan as.
b) izvučen je točno jedan kralj.
c) izvučeni su as i kralj.
d) izvučen je as ili kralj.
e) nije izvučen as ili nije izvučen kralj.

Označimo:
A: među izvučenim kartama je točno jedan as,
B: među izvučenim je kartama točno jedan kralj.
Da bismo izračunali vjerojatnost navedenih događaja treba uočiti da se *A* sastoji od dviju komponenata: asa i neke karte koja nije as. As se bira na 4 načina, a karta koja nije as na 28 načina, bez obzira koji je as izabran. Zato je:

$p(A)=4\cdot 28/\binom{32}{2}$

p(B)=p(A)

Događaj: *izvučen je as i kralj* jest umnožak događaja *A,B*. Slično kao do sada zaključujemo da je:

$p(AB)=4\cdot 4/\binom{32}{2}$

d) događaj: *izvučen je as ili kralj* jest zbroj događaja *A,B*. Koristeći se formulom za vjerojatnost zbroja događaja dobivamo:

$$p(A+B) = p(A)+p(B)-p(AB)$$
$$=128/\binom{32}{2}$$

e) događaj: *nije izvučen as ili nije izvučen kralj* jest zbroj događaja $\overline{A}$, $\overline{B}$. Koristeći se DeMorganovom formulom i formulom vjerojatnosti suprotnog događaja dobivamo:

f) $p(\overline{A}+\overline{B}) = p(\overline{AB}) = 1-p(AB)$

$$=1 - 16/\binom{32}{2}$$

Primjer 11. Izvedimo formulu za vjerojatnost zbroja triju događaja.

$$
\begin{aligned}
p(A+B+C) &= p((A+B)+C)\\
&= p(A+B)+p(C)-p((A+B)C)\\
&= p(A)+p(B)-p(AB)+p(C)-p(AC+AC)\\
&= p(A)+p(B)-p(AB)+p(C)-p(AC)-p(BC)+p(ACBC)\\
&= p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABCC)\\
&= p(A)+p(B)+p(C)-p(AB)-p(AC)-p(BC)+p(ABC).
\end{aligned}
$$

Svojstva vjerojatnosti (1.-5.) na algebri događaja izveli smo uz pretpostavku da je skup ishoda konačan i da su ishodi međusobno ravnopravni. Štoviše, pokazali smo da se svojstva 3.-5. izvode iz prvih dvaju svojstava. Napišimo opet ta dva svojstva vjerojatnosti:

1. $p(S) = 1$
2. $p(A+B) = p(A)+p(B)$, za svaka dva događaja A,B koja se isključuju.

Ta su dva svojstva toliko intuitivno jasna da možemo pretpostaviti da vrijede na svakoj algebri događaja. Naravno, tada vrijede preostala tri svojstva. Također, ako je broj ishoda beskonačan prebrojiv ili ako je skup ishoda interval u skupu realnih brojeva, onda nećemo više imati onu formulu vjerojatnosti kao omjera povoljnih i svih mogućnosti. Primjere računanja vjerojatnosti u slučaju beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda vidjet ćemo poslije. Sad ćemo razmotriti neke primjere vjerojatnosti u slučaju kad je skup ishoda interval u skupu realnih brojeva.

Geometrijska vjerojatnost.

U sljedećim ćemo primjerima ilustrirati kako se može računati vjerojatnost u nekim pokusima s neprebrojivo mnogo ishoda.

Primjer 12. Predpostavimo da čestica može ravnopravno biti u svakoj točki intervala duljine 10. Odredimo vjerojatnost da udaljenost točke od središta intervala bude:

a) jednaka 2,
b) manja ili jednaka 2,
c) između 2 i 3.

Ishode tog pokusa možemo interpretirati točkama zadanog intervala; dakle skup je ishoda upravo zadani interval. Zato ishoda ima beskonačno mnogo.

a) označimo:

A: udaljenost čestice od središta intervala jednaka je 2.

Taj se događaj sastoji od dvaju ishoda (čestica može biti lijevo ili desno od središta). Budući da ima beskonačno mnogo ishoda, a svi su ishodi ravnopravni (tako shvaćamo tvrdnju da čestica ravnopravno može biti u svakoj točki intervala), zaključujemo da je p(A)=0 (intuitivno: omjer broja 2 i beskonačnosti jednak je 0). To možda može stvoriti nedoumicu: događaj *A* je moguć, ali mu je vjerojatnost jednaka nuli.

Da se uvjerimo u to i matematičkim rezoniranjem, pretpostavimo da je p(A)>0. Vjerojatnost da je udaljenost čestice od središta jednaka 2.1; 2.11; 2.111 itd. jednaka je p(A) (jer se svaki od tih događaja također sastoji od po dvaju ishoda, a svi su ishodi ravnopravni). Ako bismo uzeli zbroj dovoljno mnogo tih događaja (koji se međusobno isključuju), dobili bismo događaj kojemu je vjerojatnost veća od 1 (zbog svojstva 2. vjerojatnosti). To je u suprotnosti sa svojstvom 1. (da je ukupna vjerojatnost jednaka 1). Dakle, ne može biti p(A)>0 pa mora biti p(A)=0.

Treba imati na umu sljedeće: taj smo zaključak izveli iz pretpostavke da zaista postoji vjerojatnost na algebri događaja u ovom pokusu (i da ona ima svojstva 1. i 2.).

b) Označimo:

B: udaljenost čestice od središta intervala manja je ili jednaka 2.

Taj se događaj interpretira intervalom duljine 4, simetričnim s obzirom na središte zadanog intervala duljine 10 (taj interval možemo označiti slovom *S*, kao sigurni događaj). Vidimo da vjerojatnost ne možemo računati dijeljenjem broja povoljnih ishoda s brojem svih ishoda (kao u slučaju konačno mnogo ishoda) jer bismo dobili beskonačno kroz beskonačno. Međutim , možemo postupiti slično i, kao vjerojatnost događaja uzeti omjer duljine intervala koji reprezentira događaj i duljine ukupnog intervala. Dakle,

p(B) := duljina intervala *B*/duljina intervala S

= 4/10.

Treba uočiti da smo *prihvatili razumnim* ovakvo računanje vjerojatnosti (ali da nismo dokazali da je to tako). Napomenimo da pri ovakvoj interpretaciji vjerojatnosti u tom pokusu i pri interpretaciji da su točke intervali duljine 0, proizlazi da je vjerojatnost svakog od ishoda jednaka 0 (što smo dobili i u a)). Također, može se pokazati da je ovakvo rezoniranje matematički konzistentno.

c) Označimo:

C: udaljenost čestice od središta intervala je između 2 i3.

Taj se događaj interpretira unijom dvaju intervala, svakog duljine 1. Zato je:

p(C)=2/10.

Primjer 13. U svakom trenutku vremenskog intervala [0,T], ravnopravno mogu doći dva signala. Ako vremenski razmak dolaska signala bude manji od *v* (gdje je *v* mali pozitivan broj), doći će do smetnje. Odredimo vjerojatnost da dođe do smetnje.

Kako prvi signal može doći u bilo kojem trenutku zadanog intervala, a drugi signal također, skup ishoda tog pokusa možemo interpretirati skupom svih uređenih parova (x,y), gdje su x, y realni brojevi sa svojstvom 0<x,y<T. Tu *x* označava vrijeme dolaska prvog, a *y* vrijeme dolaska drugog signala. Uočite da je taj skup kvadrat kojemu je duljina stranice *T*.

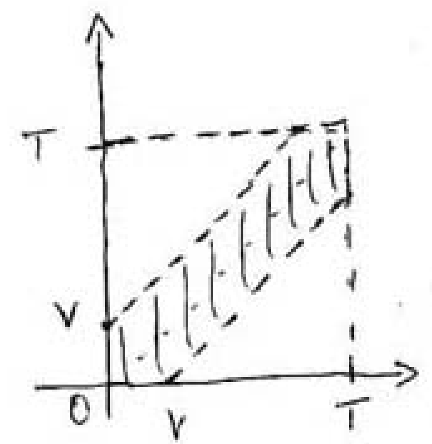
Pri toj interpretaciji, signali će doći u vremenskom intervalu manjem od *v*, ako je

$x-y<v$.
Skup uređenih parova s tim svojstvom osjenjen je na slici i on reprezentira traženi događaj *A*.
Vjerojatnost ćemo interpretirati kao **omjer površine skupa koji reprezentira događaj A i ukupne površine**. Dakle:

$$p(A) = \frac{T^2 - (T-v)^2}{T^2}.$$

Vjerojatnost u ovim primjerima naziva se **geometrijskom**, jer smo se pri njenoj definiciji koristili **geometrijskom predodžbom**.

Geom. vjer.



Statistička definicija vjerojatnosti

Što znači da je pri bacanju novčića jedan put, vjerojatnost da ispadne *P* jednaka 1/2? Znači li to da će se pri 2 bacanja novčića jednom dogoditi *P*. Naravno da ne znači. Znači li to da će se pri 20 bacanja novčića 10 puta dogoditi *P*? Ne znači ni to. Pokusom se možemo uvjeriti da će se pri 200 bacanja novčića otprilike 100 puta dogoditi *P* (a ujedno i *G*).
Evo rezultata broja pisama u nekoliko pokusa bacanja novčića po 200 puta. Zapisali smo I međurezultate nakon 20, 50, 100 bacanja.

	20 bacanja	50 bacanja	100 bacanja	200 bacanja
1.pokus	8	22	54	103
2.pokus	12	26	56	109
3.pokus	8	21	45	94
4.pokus	11	24	51	106
5.pokus	8	21	44	89

6.pokus	9	27	47	93
7.pokus	12	29	54	110
8. pokus	10	27	54	103

Izračunajmo omjer broja pojavljivanja pisma i ukupnog broja bacanja u tim pokusima.

1.pokus 103/200 = 0.515

2.pokus 109/200 = 0.545

3.pokus 94/200 = 0.47

4.pokus 106/200 = 0.53

5.pokus 89/200 = 0.445

6.pokus 93/200 = 0.465

7.pokus 110/200 = 0.55

8.pokus 103/200 = 0.515

Treba uočiti da se omjeri grupiraju oko broja 0.5, tj. da je pri svakom od 200 bacanja novčića, omjer približno jednak 0.5.
Ukupno, tj. u 1 600 bacanja, događaj *P* dogodio se 807 puta. Pripadni je omjer:
807/1 600 = 0.504375.
Taj je rezultat na dvije decimale jednak broju 0.5.
Ta nas razmatranja navode na **statističku definiciju vjerojatnosti** kao **graničnu vrijednost relativnih frekvencija** događaja. Pojasnimo to.
Uočimo u nekom pokusu događaj *A*. Da bismo statistički odredili vjerojatnost tog događaja ponavljajmo izvođenje tog pokusa. Ako se pri *n* izvođenja tog pokusa događaj *A* dogodio *m* puta, onda se *m* zove **frekvencija**, a kvocijent *m/n* **relativna frekvencija** događaja *A* (za *n* izvođenja pokusa).
Statistička vjerojatnost događaja *A* jest granična vrijednost reletivnih frekvencija tog događaja kad broj izvođenja pokusa teži k beskionačnosti. Kraće:
p(A) = lim m/n.
Naravno, nema matematičkih razloga koji bi bezuvjetno garantirali da će relativne frekvencije imati limes. Pokusi, poput onog s novčićem, uvjeravaju nas u to. Vidimo da se relativne frekvencije grupiraju oko teoretske vjerojatnosti.

Primjer 14. Treba provjeriti je li izrađena kocka homogena.

Taj bi se problem možda mogao riješiti uz pomoć tehnološke metode kojom se provjerava homogenost materijala. Pretpostavimo da to nismo u mogućnosti, tj. da nemamo nikakvih pomagala za provjeru homogenosti. Tada homogenost možemo provjeriti pomoću statističke vjerojatnosti. Ako pri velikom broju bacanja kocke ustanovimo da su se brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6 približno jednako puta dogodili, tj. ako su njihove relativne frekvencije približno jednake

1/6, možemo smatrati da je kocka homogena, inače ne. Vidjet ćemo poslije kako se egzaktnije odlučuje jesu li rezultati približno jednaki ili ne.

Statistička vjerojatnost nije samo alternativa za taoretsku vjerojatnost. U mnogim se pokusima i ne može doći do vjerojatnosti osim tako. Na primjer, ako želimo odrediti vjerojatnost da se atom radija raspadne u vremenu t. Naravno da se tada može govoriti samo o približnoj vjerojatnosti. Također, točnost se rezultata povećava ako se broj izvođenja pokusa (odnosno broj mjerenja) povećava.

Uvjetna vjerojatnost. Nezavisni događaji

Ako saznamo neku informaciju o pokusu, može se dogoditi da se vjerojatnosti događaja promijene. To ćemo pokazati na primjerima.

Primjer 15. Kolika je vjerojatnost da je pri bacanju kocke ispao broj 6 ako znamo da je ispao paran broj?

Označimo:
A: ispao je broj 6.
B: ispao je paran broj.
Naravno, $p(A) = 1/6$; $p(B) = 3/6$.
Međutim ako znamo da je ispao paran broj, nema više 6 nego samo 3 mogućnosti (ishoda): ispao je broj 2 ili broj 4 ili broj 6. Kako su te 3 mogućnosti ravnopravne, zaključujemo da je sad vjerojatnost da ispadne 6 jednaka 1/3. To se zapisuje kao:
$p(A|B) = 1/3$
i čita kao: *vjerojatnost da se dogodi A ako se dogodio B je 1/3* (odnosno *uvjetna vjerojatnost događaja A uvjetno o B jednaka je* 1/3).
Vidimo da se u tom primjeru uvjetna vjerojatnost događaja razlikuje od njegove izvorne vjerojatnosti.

Dakle, ako znamo da se dogodio događaj B, onda se skup ishoda mjenja. Taj novi skup ishoda jest upravo skup ishoda koji čine događaj B. Tada događaj A čine samo oni njegovi ishodi koji su ujedno i u B, tj. oni koji su u $A \cap B$, tj. u AB. Koristeći se time izvodimo:
$$\begin{aligned} p(A|B) &= \text{card}\,(AB)/\text{card}\,B \\ &= (\text{card}(AB)/\text{card}S)/(\text{card}B/\text{card}\,S) \\ &= p(AB)/p(B). \end{aligned}$$
Tom je formulom uvjetna vjerojatnost izražena pomoću izvorne vjerojatnosti. Treba uočiti da taj izvod vrijedi za pokus u kojemu je skup ishoda konačan i u kojemu su ishodi međusobno ravnopravni.
Do iste bi se formule došlo ako bismo imali pokus u kojemu se skup ishoda S interpretira kao interval realnih brojeva, kao podskup ravnine ili kao podskup prostora. Oznakom m označimo duljinu, površinu, odnosno obujam. Tada izvodimo:
$$\begin{aligned} p(A|B) &= m(AB)/m(B) \\ &= (m(AB)/m(S))/(m(B)/m(S)) \\ &= p(AB)/p(B). \end{aligned}$$
Dakle, uvijek dolazimo do iste formule:
$$p(A|B) = p(AB)/p(B)$$
To je **formula uvjetne vjerojatnosti**.
Ta se formula može napisati i u obliku:

$$p(AB) = p(A|B)p(B)$$

Ta se formula zove **formulom umnoška (produktnom formulom)**.

U navedenom primjeru lako smo prihvatili da se vjerojatnost ispadanja broja 6 promijenila kad smo saznali da je ispao paran broj. Međutim, često okolnosti u kojima se pojavljuje uvjetna vjerojatnost znaju, barem na prvi pogled, izgledati paradoksalno. Navedimo jedan takav slučaj.

Primjer 16. Trgovački je putnik došao u posjet bračnom paru. U ragovoru s njima saznao je da imaju dvoje djece. U to je u sobu ušao dječak.

(i) Kolika je vjerojatnost da je i drugo dijete dječak?

(ii) U nastavku razgovora trgovački je putnik saznao da je drugo dijete mlađe. Kolika je sad vjerojatnost da je drugo dijete dječak?

Prije nego prijeđemo na rješavanje ovog problema (za koje je potrebno i dodatno pojašnjenje), pogledajmo jedan drugi primjer, analogan ovome, ali nešto jasniji (vi sami možete pokušati riješiti problem s djecom).

Primjer 17. Pokus se sastoji od bacanja dviju kocaka.

(i) Pretpostavimo da smo saznali da je na prvoj kocki bio broj 6. Kolika je vjerojatnost da je i na drugoj kocki bio broj 6?

(ii) Pretpostavimo da smo saznali da je na jednoj od kocaka bio broj 6. Kolika je vjerojatnost da je na drugoj kocki bio 6?

Razmotrimo ovaj primjer (radi provjere svoga osjećaja za problem, pokušajte odgovoriti je li rezultat u oba slučaja isti).
U prvom slučaju znamo da je na prvoj kocki bio rezultat 6. Intuitivno nam je jasno da ta činjenica **ne može utjecati** na vjerojatnost događaja da na drugoj kocki bude 6 (što znači da vjerojatnost treba ostati 1/6). Tome i sličnim okolnostima više ćemo se posvetiti u sljedećoj jedinici, a sada tvrdnju i obrazložimo.
Ako je na prvoj kocki bio 6, onda su mogle nastati sljedećih 6, međusobno ravnopravnih, mogućnosti: 61, 62, 63, 64, 65, 66 , gdje ovi zapisi imaju uobičajeno značenje (na primjer 63 znači da je na prvoj kocki bio 6, a na drugoj 3). Samo u jednoj od tih mogućnosti i na drugoj je kocki bio 6 (to je mogućnost 66). Zato je vjerojatnost da je i na drugoj kocki bio 6 jednaka 1/6 (kao da prvu kocku nismo ni bacali).

U drugom slučaju (koji se **samo naizgled ne razlikuje** od prvoga) znamo da je na jednoj od kocaka bio 6 (ali ne znamo na kojoj). Sad ima 11 međusobno ravnopravnih mogućnosti: 61,62,63,64,65,66,56,46,36,26,16, ali sad ima šest mogućnosti u kojima je 6 na drugoj kocki. Zato je vjerojatnost da na drugoj kocki bude 6 jednaka 6/11. Vidimo da se vjerojatnosti bitno razlikuju.

Sad ćemo pokušati slično razmatranje primijeniti na slučaj trgovačkog putnika i djece, koji je još uvijek mističan (jer kakve veze može pojam *mlađi* imati s pojmom spola). Prije svega dogovorimo se da je za rođeno dijete jednaka vjerojatnost da bude dječak kao i da bude curica). Znademo da to u stvarnosti nije baš tako (vjerojatnost rađanja dječaka, odnosno curice ovisi o mnogim okolnostima, koje se često i mijenjaju, ovise i o konkretnom bračnom paru i ona se može samo približno odrediti, kao statistička vjerojatnost).

Ako slovom *D* označimo dječaka, a slovom *C* curicu, onda za dvoje djece mogu nastati sljedeće 4 ravnopravne mogućnosti:
CC,CD,DC,DD
(gdje, na primjer, CD znači da je bračni par najprije dobio curicu, potom dječaka, itd.).
Nakon što je vidio dječaka, trgovački je putnik saznao da su ostale 3 ravnopravne mogućnosti:
CD,DC, DD
pa je u 1. slučaju vjerojatnost da i drugo dijete bude dječak jednaka 1/3 (a ne 1/2 kako bi se brzopleto moglo pomisliti).
U drugom je slučaju trgovački putnik dobio dodatnu informaciju na osnovi koje je zaključio da su ostale dvije ravnopravne mogućnosti:
CD, DD
(jer je starije dijete dječak). Dakle, u ovom je slučaju vjerojatnost da i drugo dijete bude dječak jednaka 1/2 (a ne 1/3, kao prije).

Pitanje. Nakon usvajanja dogovora da je kod svakog para jednaka vjerojatnost da se rodi curica kao i da se rodi dječak, uočite da je pokus dobivanja dvoje djece ekvivalentan pokusu bacanja novčića dva puta. Kako biste formulirali analogni zadatatak u tom pokusu?

Zadatak 1. Od triju kutija dvije su prazne, a u jednoj je nagrada. Natjecatelj slučajno odabire jednu od kutija za koju misli da je u njoj nagrada. Prije nego je otvori netko pogleda u one preostale dvije kutije, pokaže jednu koja je prazna i ponudi natjecatelju da zamijeni svoju kutiju s onom preostalom. Isplati li se to natjecatelju? Izračunajte relevantne vjerojatnosti.

Zadatak 2. Bomba se deaktivira tako da se prerežu tri točno odredjene žice, a da se četvrta ne prereže. Osoba W koja je prisiljena na to da pokuša deaktivirati bombu izabere slučajno jednu od žica koju neće prerezati (dok ostale tri hoće).
(a) Nakon slučajnog odabira jedne od preostalih triju žica, W je prereže i bomba ne eksplodira. Ima li W razloga promijeniti svoj odabir žice koju je na početku odabrao da je ne reže?
(b) Razgledavanjem triju žica koje je odlučio prerezati W uoči da je jednu pregrizao miš. Ima li sad W razloga promijeniti svoj početni odabir?

Navedimo još nekoliko karakterističnih primjera.

Primjer 18. U kutiji je 5 crvenih i 8 bijelih kuglica. Kuglice izvlačimo redom iz kutije (bez vraćanja). Kolika je vjerojatnost:
a) da je druga izvučena kuglica bijela, ako je prva bila bijela,
b) da je druga izvučena kuglica bijela ako je prva izvučena bila crna,

Označimo:
B1: prva izvučena kuglica je bijela,
B2: druga izvučena kuglica je bijela,
C1: prva izvučena kuglica je crvena,
C2: druga izvučena kuglica je crvena.

a) Treba izračunati p(B2|B1). Ako je prva izvučena kuglica bila bijela, onda je u kutiji ostalo 12 kuglica: 5 crvenih i 7 bijelih. Zato je:

$p(B2|B1) = 7/12$.
b) $p(B2|C1) = 8/12$.

Primjer 19. Neka je pokus kao u prethodnom primjeru. Izračunajmo vjerojatnost da:
a) prva izvučena kuglica bude bijela, a druga crvena,
b) izvučene kuglice budu različitih boja.

Zadržimo dosadašnje oznake.
a) Treba izračunati vjerojatnost umnoška događaja B1, C2. Dobijamo:

$p(B1C2) = p(C2B1)$ zbog komutativnosti umnoška
$= p(C2|B1)p(B1)$ formula umnoška
$= (5/12)\ (8/13)$
$= 10/39$,

b) $p(B1C2+C1B2) = p(B1C2)+p(C1B2)$ jer se događaji B1C2,C1B2 isključuju
$= 10/39+p(B2|C1)p(C1)$ zbog a) i prema a)
$= 10/39+(8/12)(5/13)$
$= 20/39$.

Treba uočiti da događaji B1C2, C1B2 imaju jednake vjerojatnosti (iako su različiti). To smo dobili računanjem, koristeći se formulom umnoška. Postavlja se pitanje jesmo li to mogli zaključiti i bez računanja. Jesmo, koristeći se simetrijom. Zamislimo da netko zamijeni redoslijed kuglica (nakon izvlačenja). Tada ona kuglica koja je izvučena prva postaje druga i obratno. Općenito, događaj B1C2 postaje događajem B2C1 i obratno. Kako vjerojatnost ne ovisi o izvođenju pokusa, već samo o njegovu karakteru, vjerojatnosti tih događaja moraju biti jednake.

Primjer 20. Neka je pokus kao u prethodna dva primjera, samo neka nam izvođač sakrije prvoizvučenu kuglicu i neka je drugoizvučena kuglica bila bijela. Kolika je vjerojatnost da je sakrivena kuglica bijela?

Neki će na brzinu reći da to što je izvučeno drugi put ne može utjecati na rezultat prvog izvlačenja (jer je vremenski poslije njega). To je pogrješno. Osvrnut ćemo se na to poslije, a sada izračunajmo traženu vjerojatnost. Zadržimo dosadašnje oznake.

$p(B1|B2) = p(B1B2)/p(B2)$ formula uvjetne vjerojatnosti
$= p(B2B1)/p(B2)$ komutativnost množenja
$= p(B2|B1)p(B1)/p(B2)$ formula umnoška
$= (7/12)\ p(B1)\ /p(B2)$
$= 7/12$ jer je $p(B1) = p(B2)$ iz razloga simetrije koji smo objasnili u prethodnom primjeru. To ćemo, na drugi način, objasniti poslije.

Treba uočiti da je $p(B1) = 8/13$, a da smo dobili $p(B1|B2) = 7/12$, pa rezultat drugog izvlačenja utječe na rezultat prvog izvlačenja.

Pokažimo sad, na jednostavnom primjeru, da rezultat drugog izvlačenja može utjecati na rezultat prvoga. Zamislimo da smo u kutiji imali 1 bijelu i 3 crvene kuglice. Pretpostavimo da nismo pogledali boju prve kuglice, a da je druga bila bijela. Sada znamo, bez gledanja, da je prva kuglica crvena (jer ima samo jedna bijela, a ta je već izvučena). Dakle, $p(B1) = 1/4$, ali je $p(B1|B2) = 0$.

U nekoliko smo prethodnih primjera vidjeli da vjerojatnost nekog događaja ovisi o tome je li se dogodio neki drugi događaj.

Ako je $p(A|B) \neq p(B)$, onda kažemo da je događaj A zavisan o događaju B.
Ako je $p(A|B) = p(B)$, onda kažemo da je događaj A nezavisan o događaju B.

Primjer 21. Bacamo kocku 1 put. Ispitajmo zavisnost događaja A: $\{1,2,3,4\}$ o događajima B: $\{3,4,5\}$, C: $\{4,5,6\}$.

$p(A) = 4/6$,
$p(A|B) = 2/3$ (od triju mogućnosti: 3,4,5 dvije su povoljne: 3,4)
$p(A|C) = 1/3$ (od triju mogućnosti: 4,5,6 jedna je povoljna: 4).
Dakle, $p(A|B) = p(A)$ pa je A nezavisan o B,
$p(A|C) \neq p(A)$ pa je A zavisan o C.

Teško je bilo unaprijed, bez računanja, znati da je, u gornjem primjeru, *A* nezavisan o *B*, a zavisan o *C*. Znači li to da nezavisnost dvaju događaja nema intuitivnu pozadinu, tj. da ćemo uvijek nezavisnost, odnosno zavisnost događaja provjeravati računanjem? Ne znači. Jedan od najvažnijih slučajeva u kojima ćemo intuitivno prepoznavati nezavisnost jeste uzastopno izvođenje jednog te istog pokusa ili uzastopno izvođenje različitih pokusa koji ne utječu jedan da na drugoga (nezavisno izvođenje jednog ili više pokusa).

Prije nego nastavimo s primjerima, razmotrimo još jednom definiciju nezavisnosti događaja *A* o događaju *B*:
1. $p(A|B) = p(A)$
$p(AB)/p(B) = p(A)$
2. $p(AB) = p(A)p(B)$
Treba uočiti da je formula 1. nesimetrična (to znači: ako slova *A,B* zamijene mjesta, formula se mijenja). Također treba uočiti da je formula 2. simetrična. Ako *A,B* zamijene mjesta dobije se formula $p(BA) = p(B)p(A)$, koju, zbog komutativnosti množenja događaja i komutativnosti množenja brojeva, možemo smatrati formulom 2. S druge strane, ta je formula samo drukčije napisana formula
3. $p(B|A) = p(B)$
(naravno, smatramo da je $p(A)>0$ i $p(B)>0$). Zaključujemo:
Ako je *A* nezavisan o *B*, onda je *B* nezavisan o *A*.
Drugim riječima,
Nezavisnost događaja jest simetrična relacija.
Zato se govori da su *A, B* međusobno nezavisni, odnosno da su međusobno zavisni.
Formula 2. zove se **produktnom formulom** za nezavisne događaje.
Ta se formula može shvatiti kao:

Dva su događaja nezavisna ako i samo ako je vjerojatnost njihova umnoška jednak umnošku njihovih vjerojatnosti.

Treba uočiti neznatnu razliku između tvrdnja formula 1., 3. s jedne i formule 2. s druge strane. U formuli 1. mora biti $p(B)>0$; slično, u formuli 3. mora biti $p(A)>0$, dok formula 2. vrijedi i ako je jedan od $p(A)$, $p(B)$ (ili oba) 0. Dogovorom se uzima da je događaj kojemu je vjerojatnost 0 nezavisan od bilo kojeg događaja, odnosno da je svaki događaj nezavisan od događaja kojemu je vjerojatnost jednaka 0 (to posebice vrijedi za nemogući događaj). Zato je formula 2. potpuni zapis nezavisnosti dvaju događaja.

Primjer 22. Bacamo kocku dva puta. Provjerimo nezavisnost događaja:
A: prvi je put ispao 6,
B: drugi je put ispao 5.

Intuitivno je jasno jasno da su ta dva događaja nezavisna i to ne treba provjeravati (naime, bez obzira što je ispalo prvi put, vjerojatnost da drugi put bude 5 jednaka je 1/6). Međutim, to se zaista može provjeriti računanjem. Zapišimo događaje *A, B* kao podskupove skupa ishoda u tom pokusu:
A = {61, 62, 63, 64, 65, 66}   tu, na primjer, 64 znači da je prvi put ispao 6, a drugi put 4
B = {15, 25, 35, 45, 55, 65},
AB = {65}
Zato je (budući da je ukupno 36 ravnopravnih ishoda):
p(AB) = 1/36,
p(A) = 6/36 = 1/6;   p(B) = 6/36 = 1/6;   p(A)p(B) = 1/36.
Dakle, p(AB) = p(A)p(B), pa su *A,B* međusobno nezavisni.

Intuitivno je jasno da iz nezavisnosti događaja *A, B* slijedi nezavisnost događaja *A*, $\overline{B}$ (ako događanje događaja *B* ne utječe na vjerojatnost događaja *A*, onda na tu vjerojatnost ne utječe ni nedogađanje događaja *B*).
To se može i strogo matematički dokazati. Pretpostavimo da su *A, B* nezavisni, tj. da je p(AB) = p(A)p(B). Dokažimo da su *A*, $\overline{B}$ također nezavisni, tj. da je p(A$\overline{B}$) = p(A)p($\overline{B}$).
Zaista:

$$\begin{aligned} p(A\overline{B}) &= p(A) - p(AB) \\ &= p(A) - p(A)p(B) \qquad \text{jer su, prema pretpostavci, } A,B \text{ nezavisni} \\ &= p(A)(1 - p(B)) \\ &= p(A)p(\overline{B}). \end{aligned}$$

Slično možemo dokazati općenito:
Ako su događaji *A,B* nezavisni, onda su međusobno nezavisni i događaji A, $\overline{B}$, događaji $\overline{A}$, B te događaji $\overline{A}$, $\overline{B}$.

Mnogi, bez razloga, miješaju nezavisnost i isključivost događaja. Zato treba upamtiti sljedeće:
Dva se događaja isključuju, ako pojavljivanje jednog onemogućuje pojavljivanje drugoga. U toj se definiciji ne pojavljuje vjerojatnost, ali vrijedi: ako se događaji isključuju, onda je vjerojatnost njihova zbroja jednaka zbroju njihovih vjerojatnosti: p(A+B) = p(A) + p(B).

S druge strane, nezavisnost događaja ne može se definirati bez vjerojatnosti i izražava se formulom: p(AB) = p(A)p(B). Ako se dva događaja isključuju onda ne mogu biti nezavisna (osim ako je jedan od njih nemogući događaj).

U sljedećem ćemo se primjeru koristiti i disjunktnošću i nezasvisnošću.

Primjer 23. Bacamo kocku tri puta. Odredimo vjerojatnost da ispane:

a) bar jednom 6,
b) točno jednom 6.

Označimo:
A : ispao je bar jednom broj 6,

A_i : i-ti je put ispao broj 6 (i = 1,2,3),
B: točno je jednom ispao 6.

a) Uočimo da je

$\overline{A}$ =ni jednom nije bio 6 = $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3$. Ad je

$$\begin{aligned} p(A) &= 1 - p(\overline{A}) \\ &= 1 - p(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) \\ &= 1 - p(\overline{A}_1)p(\overline{A}_2)p(\overline{A}_3) \quad \text{iz nezavisnost Ai slijedi nezavisnost supr. događaja.} \\ &= 1 - 5/6\ 5/6\ 5/6 \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 \end{aligned}$$

b) $B = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$

$$\begin{aligned} p(B) &= p(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) \\ &= p(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) + p(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3) \quad \text{zbog disjunktnosti} \\ &= p(A_1)p(\overline{A_2})p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(A_2)p(\overline{A_3}) + p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(A_3) \quad \text{zbog nezavisnosti} \\ &= (1/6)\ (5/6)(5/6) + (5/6)\ (1/6)\ (5/6) + (5/6)\ (5/6)\ (1/6) \\ &= 3\ (1/6)\ (5/6)\ (5/6). \end{aligned}$$

Trebalo je uočiti da su sva tri pribrojnika jednaka iako predočuju vjerojatnosti različitih događaja. U svakom od njih jednom se u umnošku pojavljuje 1/6 jer jednom ispada 6, a dva se puta pojavljuje 5/6 jer dva puta ne ispada 6.

U sljedećem ćemo primjeru uz pomoć nezavisnosti izračunati vjerojatnost nekih događaja u pokusu u kojemu ima beskonačno mnogo, ali prebrojivo ishoda.

Primjer 24. Bacamo kocku dok ne ispadne broj 6. Odredimo vjerojatnost da bude:

a) točno 3 bacanja,
b) bar 3 bacanja,
c) više od 10, a manje od 20 bacanja.

a) p(točno tri bacanja) = p(prva dva puta nije 6, treći put 6)
= p(prva dva puta nije 6)p(treći put 6)   zbog nezavisnosti
= (5/6) (5/6) (1/6)

b) p(bar 3 bacanja) = 1 – p(najviše 2 bacanja)
= 1 – p(1 bacanje ili 2 bacanja)
= 1 – p(1 bacanje) – p(2 bacanja)   zbog disjunktnosti
= 1 – 1/6 – p(prvi put nije 6, drugi put 6)
= 1 – 1/6 – p(prvi put nije 6)p(drugi put 6) zbog nezavisnosti
= 1 – 1/6 – (5/6) (1/6)

c) $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{5}{6}\right)^{18}\frac{1}{6}$.

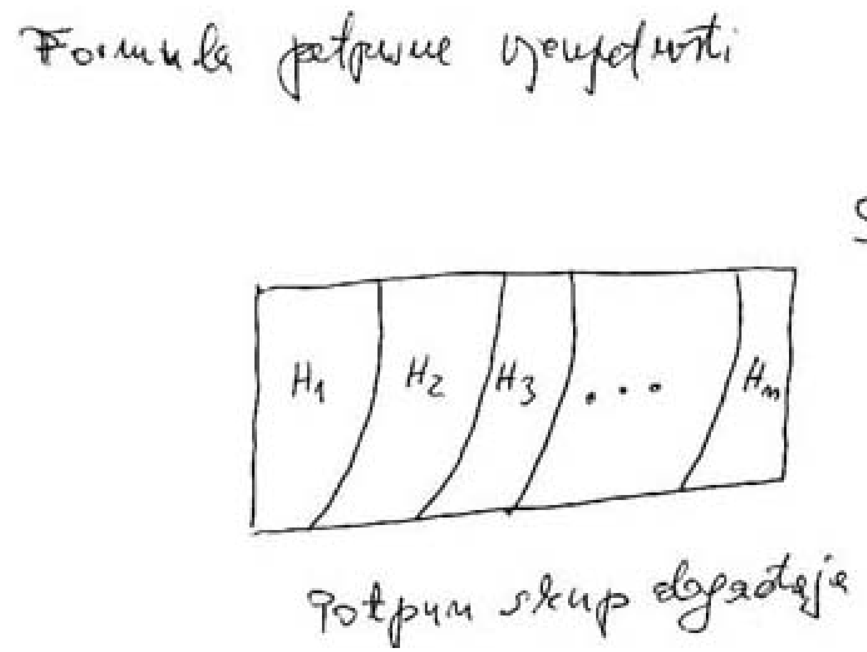
Zadatak 3. Izračunajte taj zbroj koristeći se formulom za zbroj članova geometrijskog reda.

Formula potpune vjerojatnosti.

Vratimo se pokusu izvlačenja dviju kuglica iz kutije s 5 crvenih i 8 bijelih kuglica.
Podsjetimo:
$p(B_1) = 8/13$ vjerojatnost da prvoizvučena kuglica bude bijela je 8/13
$p(B_2) = 8/13$ po načeku simetrije vjerojatnost da je druga kuglica bijela je ista
Mnogima načelo simetrije nije uvjerljivo. Zato pokušajmo vjerojatnost događaja B2 izračunati na drugi način:
$B_1+C_1 = S$ prvi put je izvučena ili bijela ili crvena kuglica
$B_2(B_1+C_1) = B_2S$
$B_2B_1+B_2C_1 = B_2$
$p(B_2B_1)+p(B_2C_1) = p(B_2)$ jer se B2B1 i B2C1 isključuju (jer se B1 i C1 isklj.)
$p(B_2) = p(B_2|B_1)p(B_1)+p(B_2|C_1)p(C_1)$ formula umnoška
$= (7/12)\,(8/13) + (8/12)\,(5/13)$
$= 14/39 + 10/39$
$= 8/13$
što smo i trebali dokazati.

Treba uočiti da se ovo izvođenje zasniva na činjenici da se događaji B1 i C1 isključuju i da im je zbroj siguran događaj (ta su dva događaja jedan drugome suprotni). Slično se može postupiti kad imamo više (a ne samo dva) događaja koji se međusobno isključuju i kojima je zbroj sigurni događaj.

Kažemo da događaji H1, H2,…,Hn čine **potpun skup događaja** ako je:
(i) $H_iH_j = \emptyset$, za $i \neq j$ (događaji se međusobno isključuju)
(ii) $H_1+\ldots+H_n = S$ (zbroj događaja je sigurni događaj)
(iii) $p(H_i)>0$, za sve i.



Događaji B1, C1 koje smo razmatrali prije čine potpun skup događaja. Općenito, svaka dva međusobno suprotna događaja (kojima je vjerojatnost pozitivna) čine potpun skup

događaja. U svakom pokusu s konačno mnogo ishoda, ishodi čine potpun skup događaja. Provjerite.
Evo nekoliko potpunih skupova događaja u pokusu bacanja kocke 3 puta.

(1)	*Hi: i puta je ispao broj 6*	*(i = 0,1,2,3)*
(2)	*Hi: i puta je ispao broj 5*	*(i = 0,1,2,3)*
(3)	*Hi: i puta je ispao paran broj*	*(i = 0,1,2,3)*
(4)	*Hi: zbroj je i*	*(i = 3,4,5,…,18)*
(5)	*Hi: najveći je broj i*	*(i = 1,2,3,4,5,6)*
(6)	*Hi: najmanji je broj i*	*(i = 1,2,3,4,5,6)*

Primjer 25. Dokažimo da su skupovi (1)-(6) potpuni skupovi događaja. Izračunajmo vjerojatnosti događaja Hi

U svim slučajevima treba provjeriti svojstva (i), (ii), (iii) potpunog skupa događaja.

(1) (i) Hi i Hj se isključuju za i $\neq$ j, jer broj 6 ne može ispasti i puta i j puta za i $\neq$ j.
(ii)Zbroj događaja Hi jest sigurni događaj jer broj šest mora ispasti ili nikako ili jednom ili dvaput ili triput.
(iii) očito

(2) taj je primjer identičan primjeru (1) jer su brojevi 5 i 6 ravnopravni.

(3) (i) isto kao i u (1)
(ii) isto kao i u (1)
(iii) očito, samo događaji Hi imaju drukčije vjerojatnosti nego u (1) i (2).

(4) (i) Hi i Hj se isključuju za i $\neq$ j jer ne može zbroj biti i, a ujedno i j za i $\neq$ j.
(ii) jer je najmanji zbroj je 3 (kad je na sve tri kocke 1), a najveći 18 (kad je na sve tri kocke 6) i jer se postiže svaki zbroj između njih.
(iii) očito

(5) (i) Hi i Hj se isključuju za i $\neq$ j, jer ne može najveći rezultat na kockama biti i, a ujedno i j za i $\neq$ j.
(ii) maksimalni broj mora biti jedan od brojeva od 1 do 6, jer se na svakoj kocki može postići svaki od tih brojeva.
(iii) očito

(6) slično kao u (5), samo se događaji Hi u tim slučajevima razlikuju (a razlikuju se i njihove vjerojatnosti).

Prema analogiji na primjer riješen na početku, mogli bismo zaključiti da vrijedi sljedeće:

Neka H1,…,Hn čine potpun skup događaja i neka je *A* bilo koji događaj. Tada je:

$$p(A) = p(A|H1)p(H1)+\ldots+p(A|Hn)p(Hn)$$

Ta se formula zove **formula potpune vjerojatnosti**.
Prije nego dokažemo tu formulu pokažimo kako se ona primjenjuje.

Primjer 26. Tri tvornice proizvode proizvod iste marke. Prva proizvodi 30% proizvoda, druga 50%, a treća 20%. U prodaji je iz prve tvornice 2% neispravnih proizvoda, iz druge 3%, a iz treće 4%. Kolika je vjerojatnost da je slučajno kupljeni proizvod neispravan?

Označimo:
A: slučajno kupljeni proizvod je neispravan,
H1: slučajno kupljeni proizvod proizveden je u prvoj tvornici,
H2: slučajno kupljeni proizvod proizveden je u drugoj tvornici,
H3: slučajno kupljeni proizvod proizveden je u trećoj tvornici.
Tada je:
$p(H1) = 0.3$ (jer prva tvornica proizvodi 30% proizvoda)
$p(H2) = 0.5$
$p(H3) = 0.2$
$p(A|H1) = 0.02$ (jer prva tvornica proizvodi 2% neispravnih proizvoda)
$p(A|H2) = 0.03$
$p(A|H3) = 0.04$
Prema formuli potpune vjerojatnosti dobijemo:
$$\begin{aligned} p(A) &= p(A|H1)p(H1)+p(A|H2)p(H2)+p(A|H3)p(H3) \\ &= 0.02\cdot 0.3+0.03\cdot 0.5+0.04\cdot 0.2 \\ &= 0.029. \end{aligned}$$
Dakle, u prodaji je 2.9% neispravnih proizvoda.

Dokažimo sada formulu potpune vjerojatnosti. Kako smo već rekli, dokaz je samo tehnički nešto složeniji od rješenja početnog primjera.
$$\begin{aligned} A &= AS \\ &= A(H1+\ldots+Hn) \\ &= Ah1+\ldots+Ahn \end{aligned}$$
Zato je:
$$\begin{aligned} p(A) &= p(AH1+\ldots+AHn) \\ &= p(AH1)+\ldots+p(AHn) && \text{(jer se događaji AHi međusobno isključuju)} \\ &= p(A|H1)p(H1)+\ldots+p(AHn)p(Hn) && \text{(prema formuli umnoška).} \end{aligned}$$
Formula je dokazana.

Primjer 27. Neka je kao u prethodnom primjeru. Pretpostavimo da je slučajno kupljeni proizvod neispravan. Kolika je vjerojatnost da je on iz prve, kolika da je iz druge, a kolika da je iz treće tvornice?

Pogrješan bi bio odgovor da je vjerojatnost da je proizvod iz prve tvornice 0.3 itd. To je istina za slučajno kupljeni proizvod, međutim ako znamo da je on neispravan, te se vjerojatnosti mijenjaju (uvjetna vjerojatnost). Nas ne zanimaju $p(Hi)$ već $p(Hi|A)$.
$$\begin{aligned} p(H1|A) &= p(H1A)/p(A) \\ &= p(A|H1)p(H1)/p(A) \\ &= 0.02\cdot 0.3/0.029 \\ &= 6/29 \end{aligned}$$
Slično je:
$$\begin{aligned} p(H2|A) &= p(A|H2)p(H2)/p(A) \\ &= 0.03\cdot 0.5/0.029 \\ &= 15/29 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} p(H3|A) &= p(A|H3)p(H3)/p(A) \\ &= 0.04\cdot 0.2/0.029 \end{aligned}$$

$= 8/29.$

Ti su brojevi redom približno jedenaki 0.207; 0.517; 0.276 pa su, prema tome, različiti redom od brojeva 0.3; 0,5; 0.2.

Kako smo postupili u rješenju tog primjera, možemo postupiti općenito:

$$p(H_i|A) = p(H_iA)/p(A)$$
$$= p(A|H_i)p(H_i)/p(A|H_1)p(H_1)+\ldots+p(A|H_n)p(H_n).$$

Ta se formula naziva **Bayesovom formulom** ili **provjerom hipoteze**.